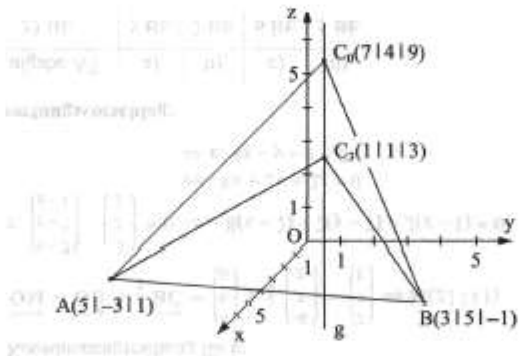
1.a) Man bildet z.B. die Ebene, die die Gerade g und den Punkt A enthält. Dann weist man nach, dass der Punkt B nicht in dieser Ebene liegt.

Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ mit t, r $\in$R.

Punktprobe mit B: $\begin{aligned} 3 &= 7 - 2t + 2r \\ 5 &= 4 - t + 7r \\ -1 &= 9 - 2t + 8r \end{aligned}$

Dieses Gleichungssystem liefert bei Betrachtung von nur 2 Gleichungen zwar eine Lösung, führt aber bei Einsetzen dieser Lösung in die dritte Gleichung zu einem Widerspruch. → B gehört nicht zu dieser Ebene! → A, B und g liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene!

b) Skizze:



Nachweis, dass ABC_t gleichschenklig ist:

$$\left|\overrightarrow{AC_t}\right| = \sqrt{(7-2t-5)^2 + (4-t+3)^2 + (9-2t-1)^2} = \sqrt{9t^2 - 54t + 117}$$

$$\left|\overrightarrow{BC_t}\right| = \sqrt{(7-2t-3)^2 + (4-t-5)^2 + (9-2t+1)^2} = \sqrt{9t^2 - 54t + 117}$$

→ $\left|\overrightarrow{AC_t}\right| = \left|\overrightarrow{BC_t}\right|$ für alle $t \in R$ und damit gleichschenklig

rechtwinklige Dreiecke: Wegen der Gleichschenkligkeit kann ein rechter Winkel nur bei C liegen!

Also muss man untersuchen, wann $\overrightarrow{C_tA} \cdot \overrightarrow{C_tB} = 0$ gilt.

$$\begin{pmatrix} -2+2t \\ -7+t \\ -8+2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4+2t \\ 1+t \\ -10+2t \end{pmatrix} = 0$$

$$(-2+2t)(-4+2t) + (-7+t)(1+t) + (-8+2t)(-10+2t) = 0$$

$9t^2 - 54t + 81 = 0$ → $(3t-9)^2 = 0$ → t = 3

Für t = 3 ist das Dreieck rechtwinklig.

c) Ebene $\varepsilon_t : \vec{x} = \overrightarrow{0A} + p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC_t}$ also $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 2-2t \\ 7-t \\ 8-2t \end{pmatrix}$ mit p, q, t∈R

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit s∈R

Die Gerade schneidet die Ebene dann senkrecht, wenn der Richtungsvektor der Geraden und ein Spannvektor der Ebene senkrecht aufeinander stehen, z.B. $\begin{pmatrix} 2-2t \\ 7-t \\ 8-2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

also nach Zusammenfassen $9t - 27 = 0$ und damit t = 3

→ $\varepsilon_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit p, q∈R

d) Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit s∈R

Schnitt mit Ebene ε_3 aus Teilaufgabe c): $\begin{aligned} 9-3s &= 5-2p-4q \\ 3-s &= -3+8p+4q \\ 3-s &= 1-2p+2q \end{aligned}$

Gleichungssystem liefert als Lösung: $s = 2$, $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3}$

Die Koordinaten des Schnittpunktes lauten dann: S(3 | 1 | 1).